Fourierova transformace

Definice 1 (Fourierova transformace). *Fourierovou transformací funkce* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *budeme nazývat funkci* $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *definovanou předpisem*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

inverzní Fourierovou transformací funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *pak budeme nazývat funkci* $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *definovanou předpisem*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i2\pi \xi \cdot x} \, dx,$$

(v obou případech za předpokladu, že itegrály vpravo nají na $\mathbb{R}^d$ *smysl)*

Poznámky a příklady. *1. Používají se i jiné (velmi podobné) definice Fourierovy tansformace, například*

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\omega \cdot \xi} \, dx, \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\omega \cdot \xi} \, dx,$$

ale i další.

2. Používá se rovněž zkrácené značení $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ *a* $\mathcal{F}^{-1}(f) = f$

3. Pro $f \in L_1$ *platí:*

- $|\hat{f}(\xi)| \leq ||f||_1$, $\xi \in \mathbb{R}^d$,
- $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$, *tj.* $\hat{f}$ *je spojitá (dokonce stejnoměrně) a* $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$,
- *je-li* $g(x) = t(x + y)$, *potom* $\hat{g}(\xi) = e^{i2\pi y \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$,
- *je-li* $g(x) = t(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$, *potom* $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|^d} f\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$.

Definice 2 (konvoluce). *Konvolucí funkcí* $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *nazýváme funkci* $f \star g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *definvanou jako*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(má-li integrál napravo na $\mathbb{R}^d l$ *smysl).*

Poznámky a příklady. *1. Jsou-li* $f, g \in L_1$, *potom* $f \star g \in L_1$ *(platí i odhad* $||f \star g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$*). Má tedy smysl psát* $\hat{f}, \hat{g}$ *i* $\widehat{f \star g}$, *pro které navíc platí* $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$.